

分科測驗（114 學年度起適用）

數學乙考科參考試卷（卷一）

試題解析

第壹部分、選擇（填）題

試題編號：1

參考答案：(4)

學科內容：D-12 乙-1 離散型隨機變數、D-12 乙-2 二項分布

測驗目標：隨機變數的期望值

試題解析：根據題意，出現 1 點、6 點的機率均為 $\frac{1-4\times(\frac{1}{12})}{2} = \frac{1}{3}$ ，推得題意所求為 $120 \times \frac{1}{3} = 40$ 。

試題編號：2

參考答案：(5)

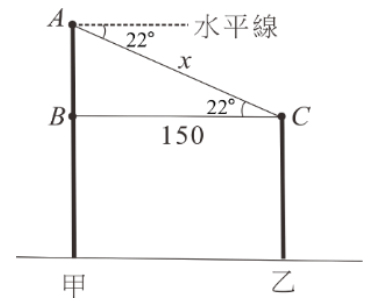
學科內容：G-10-7 三角比的性質

測驗目標：利用三角比的觀念解三角測量問題

試題解析：1.由甲塔頂 A 測得乙塔頂 C 的俯角為 22° ，可知水平線與 $\overline{AC}$ 的夾角為 22° 。

2.由甲、乙兩塔的水平距離為 150，可知圖中 $\overline{BC} = 150$ ，且由 1.知 $\angle ACB = 22^\circ$ 。

3.設繩索 $\overline{AC}$ 的長度為 x ，可知 $\cos 22^\circ = \frac{150}{x}$ ，故 $x = \frac{150}{\cos 22^\circ}$ 。



試題編號：3

參考答案：(4)

學科內容：S-11B-1（S-11A-1）空間概念

測驗目標：空間中多面體的性質

試題解析：長方體有六個面，八個頂點；截去八個角後，除原有的六個面之外，新增了八個截面，故形成十四面體。

試題編號：4

參考答案：(1)

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：有系統的計數

試題解析：根據題意，可分成以下 3 種情況討論：

1. 甲、乙都在 A 組，此時有 $C_1^6 \times C_3^5 \times C_2^2 = 60$ 種分組方式。

2. 甲、乙都在 B 組，此時有 $C_3^6 \times C_1^3 \times C_2^2 = 60$ 種分組方式。

3. 甲、乙都在 C 組，此時有 $C_3^6 \times C_3^3 = 20$ 種分組方式。

以上共 140 種分組方式。

試題編號：5

參考答案：(3)

學科內容：G-11B-1 (G-11A-1) 平面向量、G-11B-2 (G-11A-6) 平面向量的運算

測驗目標：平面向量的線性組合與內積運算

試題解析：由 A、B、D 共線，以及 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，以及 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$ ，可推得 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，

$$3(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = 8(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})，推得 \overrightarrow{OD} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{8}{5}\overrightarrow{OB}。$$

【解法一】

因為 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$ ， $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$ ，

$$\text{故 } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\frac{-3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{8}{5}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{-9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{16}{25}|\overrightarrow{OB}|^2 = 0，$$

$$\text{得 } \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{3}{4}。$$

【解法二】

因為 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$ ，設 $O(0,0)$ 、 $A(a,0)$ 以及 $B(0,b)$ ，

$$\text{可得 } \overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{3a}{5}, \frac{2b}{5}\right)，\text{ 以及 } \overrightarrow{OD} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{8}{5}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{-3a}{5}, \frac{8b}{5}\right)。$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OC} \text{ 垂直 } \overrightarrow{OD}，\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{-9a^2}{25} + \frac{16b^2}{25} = 0，\text{ 得 } \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{3}{4}。$$

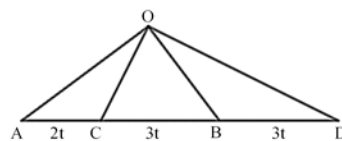
【解法三】

利用 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ ， $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ 。可得 $\overline{AC}:\overline{CB}:\overline{BD} = 2:3:3$ ，因為 $\triangle COD$ 為直角

三角形，且 B 為 $\triangle COD$ 之斜邊 $\overline{CD}$ 中點，故 B 為 $\triangle COD$

的外接圓圓心，推得 $\overline{BO} = \overline{BC} = \overline{BD} = 3t$ ， $t > 0$ 。由 $\triangle AOB$

為直角三角形，得 $\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}。$



試題編號：6

參考答案：(2)(4)

學科內容：N-10-6 數列、級數與遞迴關係、N-12 乙-2 無窮等比級數

測驗目標：觀察規律，評量等比數列、無窮等比級數和

試題解析：奇數項一般式為 $a_{2n-1} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{(2n-1)-1}{2}} = 3^{2-n}, n=1, 2, 3, \dots$;

偶數項一般式為 $a_{2n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(2n)-2}{2}} = 2^{2-n}, n=1, 2, 3, \dots$

選項(1)： $a_4 = 1$ 、 $a_5 = \frac{1}{3}$ 、 $a_6 = \frac{1}{2}$ 、 $a_7 = \frac{1}{9}$ ，故 $a_4 > a_6 > a_5 > a_7$ 。

選項(2)： $\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{2^{-3}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^3} = \frac{81}{8} > 10$ 。

選項(3)：

【解法一】 $\sum_{n=1}^{50} a_{2n} < \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$ 。

【解法二】 $\sum_{n=1}^{50} a_{2n} = a_2 + a_4 + \dots + a_{100} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + 2^{-48}$

$$= \frac{2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50} < 4。$$

選項(4)：由奇數項一般式 $a_{2n-1} = 3^{2-n}$ ，及 $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > \frac{1}{100}$ ， $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} < \frac{1}{100}$ ，可知

$a_{2 \times 7 - 1} = a_{13}$ 滿足 $a_{13} < \frac{1}{100}$ 。同理由偶數項一般式 $a_{2n} = 2^{2-n}$ ，可知 $a_{2 \times 9} = a_{18}$ 滿足

$a_{18} < \frac{1}{100}$ 。故滿足 $a_n < \frac{1}{100}$ 的最小正整數 n 是 13。

選項(5)：由 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{3^{2-n}}{2^{2-n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ，得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$

試題編號：7

參考答案：(2)(4)

學科內容：D-10-4 複合事件的古典機率、

D-11B-2 不確定性 (D-11A-2 條件機率、D-11A-3 貝氏定理)

測驗目標：機率的定義、條件機率

試題解析：根據題意，以原點為起點，第一次若擲出 1、3、5 點，坐標分別為 0、-2、-4；若擲出 2、4、6 點，坐標則分別為 1、2、3。

選項(1)：投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2，則需擲出 3 點或 4 點，其機率為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

選項(2)：期望值為 $\frac{1}{6} \times (0 + 1 + (-2) + 2 + (-4) + 3) = \frac{6-6}{6} = 0$ 。

選項(3)：若要擲二次後抵達 -5，最有可能是擲出 3 點或 5 點。但擲出 3 點或 5 點，皆無法配出棋子坐標為 -5。

選項(4)：投擲骰子二次，二次點數皆大於 3 的情形有 $3 \times 3 = 9$ 種。二次點數皆大於 3 且棋子坐標為負，則兩次投擲中必定至少一次擲出 5，有 5 種情形。推得題意所求機率為 $\frac{5}{9}$ 。亦可列舉兩次點數大於 3 的情形求解。

選項(5)：投擲骰子三次，棋子會在原點，除了擲出 3 次 1 點外，還有其他可能，例如：擲出 1、3、4 點，故機率必大於 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 。

試題編號：8

參考答案：(1)(4)

學科內容：F-10-1 一次與二次函數、F-10-2 三次函數的圖形特徵、F-12 乙-4 導函數

測驗目標：二次多項式函數圖形的性質、函數的導函數

試題解析： $f(x) = 0$ 沒有實根表示二次函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方或下方。

選項(1)：當 $f(1) > 0$ 時， $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方，推得 $f(1)f(2) > 0$ ；當 $f(1) < 0$ 時， $f(x)$ 的圖形都在 x 軸下方，推得 $f(1)f(2) > 0$ 。

選項(2)：例如 $f(x) = -x^2 - 2$ ，則 $f(x) = -2$ 有實根，但 $f(x) = 1$ 沒有實根。

選項(3)：例如 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ ，則 $f(x) = 2$ 有實根，且 $f(x) = 1$ 有實根。

選項(4)：當 $f(0) > 0$ 時，圖形凹口向上，故 $f''(0) > 0$ ，得 $f(0)f''(0) > 0$ ；同理當 $f(0) < 0$ 時，圖形凹口向下，故 $f''(0) < 0$ ，得 $f(0)f''(0) > 0$ 。一般而言，對任意實數 r ， $f(r)f''(r) > 0$ 均成立。

選項(5)：當 $f(3) = f(1)$ 時，得 $(f(3) - f(1))f'(2) = 0$ ；當 $f(3) > f(1)$ 時，若函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方，則點 $(2, f(2))$ 必在極小值發生點的右側，故 $f'(2) > 0$ ；若函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸下方，則點 $(2, f(2))$ 必在極大值發生點的左側，故 $f'(2) > 0$ ，得 $(f(3) - f(1))f'(2) > 0$ 。同理可得當 $f(3) < f(1)$ 時， $(f(3) - f(1))f'(2) > 0$ 。此題也可令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，則 $(f(3) - f(1))f'(2) = [(9a + 3b + c) - (a + b + c)] \times (4a + b) = 2(4a + b)^2 \geq 0$ 。

試題編號：9

參考答案：(1)(2)(4)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：一維數據經線性平移後關於平均數、標準差的前後關係

試題解析：選項(1)： $y_1 - x_1 = (0.8x_1 + 20) - x_1 = 20 - 0.2x_1 = 0.2(100 - x_1) \geq 0$ 。

選項(2)：令甲、乙兩班的原始平均分數為 μ_{x_1} 、 μ_{x_2} ，依據題意可得 $60 = 0.8\mu_{x_1} + 20$ 、 $60 = 0.75\mu_{x_2} + 25$ ，推得 $\mu_{x_1} = 50$ 、 $\mu_{x_2} = \frac{140}{3}$ 。

選項(3)：令甲、乙兩班的原始分數標準差為 σ_{x_1} 、 σ_{x_2} ，依據題意可得 $16 = 0.8\sigma_{x_1}$ 、 $15 = 0.75\sigma_{x_2}$ ，推得 $\sigma_{x_1} = 20$ 、 $\sigma_{x_2} = 20$ 。

選項(4)： $y_1 - y_2 = (0.8x_1 + 20) - (0.75x_2 + 25) = 0.75(x_1 - x_2) + 0.05(x_1 - 100) > 0$ ，已知 $x_1 - 100 \leq 0$ ，得 $x_1 - x_2 > 0$ 。

選項(5)：由選項(2)可知，當甲班同學原始分數小於 50 分，乙班同學原始分數小於 $46\frac{2}{3}$ 分時，其調整分數會小於 60 分。但由題意無法得知各班原始分數的分布情形。以下舉例說明：

甲班：調整後分數由小到大排序為 44 分有 20 人、76 分有 20 人，因此甲班調整後分數不及格的人數有 20 人，且可由選項(2)推得甲班原始分數不及格的人數為 20 人。

乙班：調整後分數由小到大排序為 30 分有 1 人、45 分有 16 人、60 分有 6 人、75 分有 16 人、90 分有 1 人，因此乙班調整後分數不及格的人數有 17 人，且可由選項(2)推得乙班原始分數不及格的人數有 23 人。

試題編號：10

參考答案：10

學科內容：A-11B-1 矩陣與資料表格 (A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達、A-11A-3 矩陣的運算)

測驗目標：矩陣之加、減、乘法

試題解析： $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I$ ，得 $A^6 = A^2 A^2 A^2 = (2I)(2I)(2I) = 8I$ 。

$A^6 - 3A = 8I - 3A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$ ，故 $a + b + c + d = 10$ 。

試題編號：11

參考答案：46

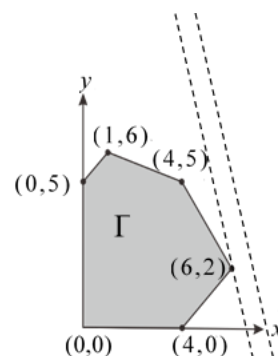
學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：由可行解區域尋找目標函數的最佳解

試題解析：直線 $7x + 2y = k$ 斜率為 $-\frac{7}{2}$ ，較頂點 $(4,5)$ 、 $(6,2)$ 所決定直線之斜率

$$\frac{5-2}{4-6} = -\frac{3}{2} \text{ 小，由平行線法可知，當直線 } 7x + 2y = k \text{ 過 } (6,2) \text{ 時，即}$$

$$k = 7 \times 6 + 2 \times 2 = 46，\text{為題意所求 } k \text{ 的最小值。}$$



試題編號：12

參考答案： $4\sqrt{2}$

學科內容：G-10-2 直線方程式、G-10-4 直線與圓

測驗目標：圓與直線的關係、兩平行線的距離

試題解析：已知圓與直線 $x + y = 0$ 交於 A 、 B 兩點且 $\overline{AB} = 8$ 。過圓心 O 點作兩平行線 $x + y = 0$ 、

$x + y = 24$ 的垂直線，設分別交兩平行線於 C 、 D 兩點。則 $\overline{OA} = 12$ ， $\overline{AC} = 4$

$\Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$ ，兩平行線 $x + y = 0$ 、 $x + y = 24$ 的距離

$$\overline{CD} = \frac{|24 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 12\sqrt{2}，\text{故 } \overline{OD} = \overline{CD} - \overline{OC} = 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}。$$

第貳部分、混合題或非選擇題

13-15 題為題組

試題編號：13

參考答案：如解析

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：對數律

試題解析：由對數律知 $\log P_n = \log a(1+r)^n = \log a + n \log(1+r)$ ，

$$\text{因此 } A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3} = \frac{\log a + 5 \log(1+r) - \log a - 2 \log(1+r)}{3} = \log(1+r)，$$

$$B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2} = \frac{\log a + 8 \log(1+r) - \log a - 6 \log(1+r)}{2} = \log(1+r)。$$

所以 $A = B = \log(1+r)$ 。

試題編號：14

參考答案：(1)

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數律、指數函數模型

試題解析：根據題意，已知該傳染病每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，可知 $10 = \frac{P_{n+16}}{P_n} = (1+r)^{16}$

則每隔 2 天總感染人數會增加為原來的 $\frac{P_{n+2}}{P_n} = (1+r)^2 = \left[(1+r)^{16}\right]^{\frac{1}{8}} = 10^{\frac{1}{8}}$ 倍。

試題編號：15

參考答案： $\frac{15}{16}$

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數律、指數函數模型

試題解析： $\sum_{k=1}^{10} \frac{P_{2k-1}}{P_{2k}} = \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_3}{P_4} + \cdots + \frac{P_{19}}{P_{20}} = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \cdots + \frac{1}{1+r} = \frac{10}{1+r}$ 。

又承 14 可知 $10 = (1+r)^{16}$ ，推得 $1+r = \pm 10^{\frac{1}{16}}$ ，因為 $r > 0$ ，所以 $1+r = 10^{\frac{1}{16}}$ 。

因此 $\sum_{k=1}^{10} \frac{P_{2k-1}}{P_{2k}} = \frac{10}{1+r} = 10^{\frac{15}{16}}$ ，即 $t = \frac{15}{16}$ 。

16-18 題為題組

試題編號：16

參考答案：(5)

學科內容：A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：實係數方程式虛根成對

試題解析：已知 $f(2-i)=0$ ，由實係數方程式虛根成對定理，知 $f(2+i)=0$ 。

因此 $2+i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的根。

試題編號：17

參考答案： $a=1, b=-2, c=-3, d=10$

學科內容：A-10-2 多項式之除法原理、A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：實係數方程式虛根成對、多項式之除法原理

試題解析：由 $f(2-i)=f(2+i)=0$ ，可知 $f(x)$ 有因式 $(x-(2+i))(x-(2-i))$ 。設

$f(x) = (Ax+B)(x-(2+i))(x-(2-i)) = (Ax+B)(x^2-4x+5)$ ，由 $f(0)=5B=10$ ，

$f(1)=(A+B)(1-4+5)=6$ ，可解出 $A=1, B=2$ 。

故 $f(x) = (x+2)(x^2-4x+5) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ ，得 $a=1, b=-2, c=-3, d=10$ 。

試題編號：18

參考答案： $\frac{125}{24}$

學科內容：F-12 乙-3 微分、F-12 乙-5 積分

測驗目標：多項式函數的微積分

試題解析： $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ ， $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$ ，以 $(0, 10)$ 為切點的切線 L ，其斜率為 $f'(0) = -3$ ，因此 L 的方程式為 $y - 10 = -3(x - 0)$ ，即 $3x + y = 10$ 。解 $3x + y = 10$ 與 $y = 2x^2 - 8x + 10$ ，得 $2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{5}{2}$ 。因此 L 與 $y = 2x^2 - 8x + 10$ 有兩交點， x 坐標分別為 $0, \frac{5}{2}$ ，由 $y = 2x^2 - 8x + 10$ 的開口朝上，題意所求封閉區域的面積：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{5}{2}} [(-3x + 10) - (2x^2 - 8x + 10)] dx \\ &= \int_0^{\frac{5}{2}} (-2x^2 + 5x) dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^3 + \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{125}{24}。 \end{aligned}$$